

Την προηγούμενη φορά
είπαμε:

9/3/17

$(\mathbb{A}, +, \cdot)$ διανυσματικός χώρος

Πρόταση: Δύο διανύσματα είναι γραμμ. εξαρτημένα
αν-ν είναι συγγραμμικά.

Πρόταση: Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ είναι
γραμμικώς εξαρτημένα Γ.Ε αν-ν κάποιο από αυτά
γράφεται ως γραμμικώς συνδυασμός των υπολοίπων.

Απόδειξη:

Έστω $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ Γ.Ε δηλαδή υπάρχουν
αριθμοί ώστε $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$
και $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_k| > 0$

Έστω ότι $\lambda_1 \neq 0$

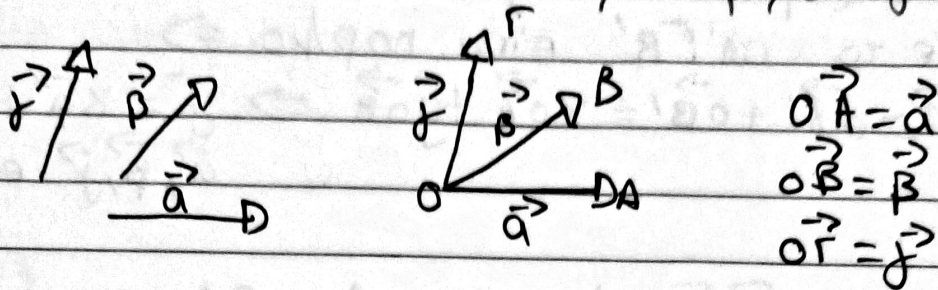
$$\vec{a}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1} \vec{a}_k = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \vec{a}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right) \vec{a}_k$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\vec{a}_1 = \mu_2 \vec{a}_2 + \dots + \mu_k \vec{a}_k$
 $\Leftrightarrow (-1) \vec{a}_1 + \mu_2 \vec{a}_2 + \dots + \mu_k \vec{a}_k = \vec{0}$
 $\Rightarrow \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ είναι Γ.Ε.

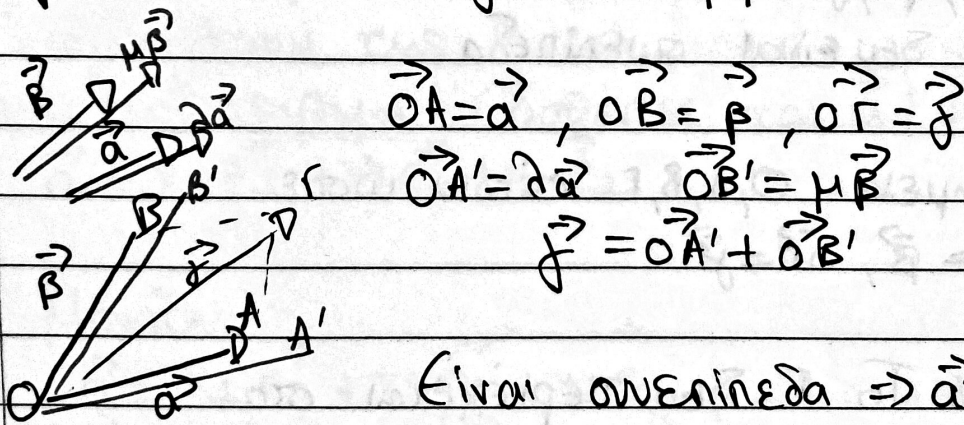
Ερώτημα: Πότε 3 διανύσματα είναι γραμ. εξαρ.

Ορισμός: Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ καλούνται συνεπίπεδα αν-ν τα σημεία O, A, B, Γ περιέχονται στο ίδιο επίπεδο όπου $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{\beta}, \vec{O\Gamma} = \vec{\gamma}$



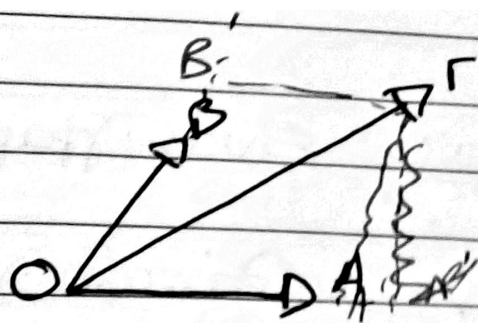
Πρόταση: 3 ~~Ε~~ διανύσματα είναι Γ.Ε αν-ν είναι συνεπίπεδα.

Απόδειξη: Έστω ότι $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι Γ.Ε τότε ένα από αυτά γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\vec{\gamma} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta}$



Αντίστροφα, Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα θα πρέι ν.δ.ο είναι Γ.Ε.

Αν τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι Γ.Ε τότε $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι Γ.Ε
 Έστω ότι $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι Γ.Α $\Rightarrow \vec{a}, \vec{\beta}$ δεν είναι συγγραμμ.
 Θεωρώ σημεία O, A, B, Γ τ.ω $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{\beta}, \vec{O\Gamma} =$



Τα O, A, B, Γ είναι
συνεπιπέδα.

Τότε έχουμε $\tau A' \parallel OB$, $\tau B' \parallel OA$

Τότε το $OA'\Gamma B'$ είναι παραλλ/μο $\Rightarrow$

$$\vec{O\Gamma} = \vec{OA'} + \vec{OB'} = x\vec{OA} + y\vec{OB} \Rightarrow \vec{\gamma} = x\vec{\alpha} + y\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \text{ είναι Γ.Ε.}$$

Πρόταση: 3 διανύσματα είναι Γ.Α αν-ν δεν
είναι συνεπιπέδα.

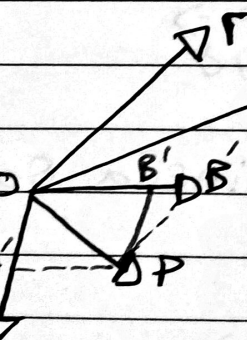
Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$

• Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι Γ.Ε τότε $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$
είναι Γ.Ε.

• Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι Γ.Α

$\Rightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ δεν είναι συνεπιπέδα

Θεωρούμε σημεία O, A, B, Γ τέτοια ώστε
 $\vec{OA} = \vec{\alpha}, \vec{OB} = \vec{\beta}, \vec{O\Gamma} = \vec{\gamma}$



Το Γ δεν περιέχεται στο
επίπεδο (π) που ορίζουν
τα O, A, B

Θεωρώ σημείο Δ ώστε $\vec{O\Delta} = \vec{\delta}$

Θεωρώ ευθεία $\tau P \parallel \tau O\Gamma$ η οποία
τέμνει το (π) στο P . Έχω
 $\vec{\delta} = \vec{OA} = \vec{OP} + \vec{PA} = \vec{OP} + 2\vec{OA}$

$PA' \parallel OB$ $PB' \parallel OA \Rightarrow OA'PB'$

είναι παραλλ/μο $\Rightarrow \vec{OP} = \vec{OA'} + \vec{OB'} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$

$$\text{Άρα } \vec{\delta} = x_0 \vec{A} + y_0 \vec{B} + z_0 \vec{C} \Rightarrow \vec{\delta} = x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c}$$

Θεώρημα: 4 διανύσματα του χώρου είναι πάντα Γ.Ε.

Πρόταση: Το μέγιστο πλήθος Γ.Α σε διανύσματα του χώρου είναι 3.

$(\Delta, +, \cdot)$

Α σύνολο των διανυμάτων του χώρου.

Αναδιατύπωση του Θεωρήματος $\dim D = 3$

Έστω $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ μία βάση του D .

Τότε κάθε διάνυσμα $\vec{a}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυμάτων της βάσης, δηλαδή υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί (δοθέντες του $\vec{a}$) ώστε

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

Μοναδικοί:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 \\ \vec{a} &= x'_1 \vec{e}_1 + x'_2 \vec{e}_2 + x'_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{cases}$$

Οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 καλούνται συτεταγμένες του $\vec{a}$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

Το $\vec{0}$ έχει σε κάθε βάση συτεταγμένες $(0, 0, 0)$

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + (x_3 + y_3)\vec{e}_3$$

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1)\vec{e}_1 + (\lambda x_2)\vec{e}_2 + (\lambda x_3)\vec{e}_3$$

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$$

Ο $\mathbb{R}^3$ έχει δομή διανυσματικού χώρου με πράξεις

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$\lambda(x_1, x_2, x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$$

Ο $\mathbb{R}^3$ είναι διανυσματικός χώρος με

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3$$

Μια βάση του είναι η $\{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1)$$

$$(\mathbb{D}, +, \cdot)$$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ βάση του $\mathbb{D}$

$$(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$$

$\{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}$ βάση του $\mathbb{R}^3$

(Δύο διανυσματικοί ~~χωροί~~ ισόμορφοι όταν έχουν ίδια διάσταση.)

$$f(\vec{e}_1) = (1, 0, 0)$$

$$f(\vec{e}_3) = (0, 0, 1)$$

$$f(\vec{e}_2) = (0, 1, 0)$$

f είναι ισομορφία

Άρα ταύτιζω το διάνυσμα $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ με την τριάδα (x_1, x_2, x_3)

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ως προς τη βάση $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$

